

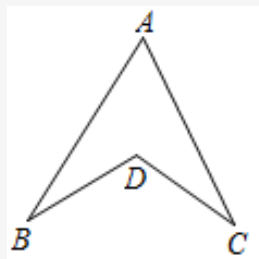
第2讲三角形的倒角模型

一、基本模型

锦囊妙计

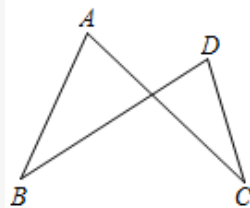
飞镖（燕尾）模型	“8”字模型	双垂模型
$\angle D = \angle A + \angle 1 + \angle 2$	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$	$\angle 1 = \angle B \quad \angle 2 = \angle A$

【备注】



$$\angle D = \angle A + \angle 1 + \angle 2$$

法一	法二	法三
证：连接BC $\because \angle A + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ $\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - \angle A - \angle 1 - \angle 2$ $\because \angle D = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 4)$ $\therefore \angle D = \angle A + \angle 1 + \angle 2$	证： 连接AD并延长 $\because \angle 3 = \angle B + \angle 1, \angle 4 = \angle C + \angle 2$ $\therefore \angle D = \angle 3 + \angle 4 = \angle BAC + \angle B + \angle C$	证： 延长BD交AC于点E $\because \angle 1 = \angle A + \angle B$ $\angle BDC = \angle 1 + \angle C$ $\therefore \angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$



$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$$

设 AC 、 BD 交于点 E

$\therefore$ 在 $\triangle AEB$ 中, $\angle A + \angle B + \angle E = 180^\circ$ (三角形内角和),

在 $\triangle CED$ 中, $\angle C + \angle E + \angle D = 180^\circ$ (三角形内角和),

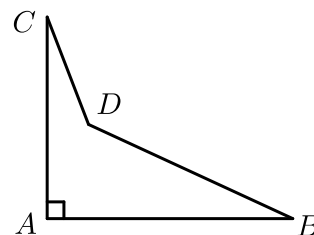
又 $\because \angle AEB = \angle CED$ (对顶角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

🗣️ 举个“栗”子

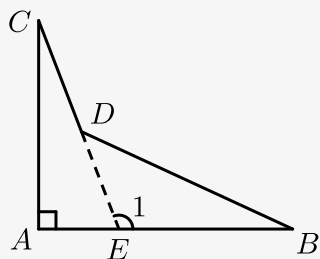
栗子1

1. 如图, 若检查工人量得一个零件的 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 32^\circ$, $\angle C = 21^\circ$, 则 $\angle BDC =$ _____ 度.



【答案】 143

【解析】 如图, 延长 CD 与 AB 相交于点 E ,



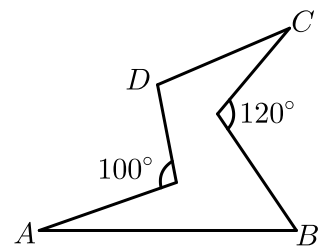
由三角形的外角性质得, $\angle 1 = \angle A + \angle C = 90^\circ + 21^\circ = 111^\circ$,

$\angle BDC = \angle B + \angle 1 = 32^\circ + 111^\circ = 143^\circ$.

故答案为: 143.

【标注】 【知识点】燕尾形 (飞镖型)

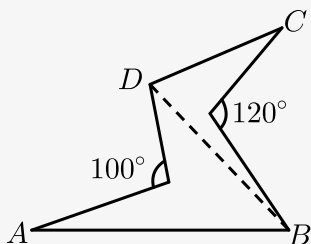
2. 如图, 求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$ _____ .



【答案】 220°

【解析】 连接 BD ，利用两次飞镖模型．

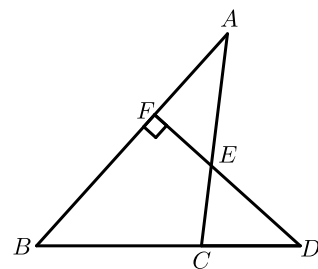
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 120^\circ + 100^\circ = 220^\circ .$$



【标注】 【知识点】 燕尾形（飞镖型）；不规则图形的多角求和

栗子2

3. 如图，已知 D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 延长线上一点， $DF \perp AB$ 于 F 交 AC 于 E ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle D = 42^\circ$ ，求 $\angle ACD$ 的度数．



【答案】 83° .

【解析】 在 $\triangle AFE$ 与 $\triangle DCE$ 中，

$$\angle A + \angle AFE + \angle AEF = 180^\circ ,$$

$$\angle D + \angle ACD + \angle CED = 180^\circ ,$$

$$\because DF \perp AB ,$$

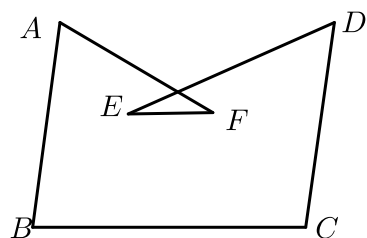
$$\therefore \angle AFE = 90^\circ ,$$

$$\because \angle A = 35^\circ , \angle D = 42^\circ ,$$

$$\begin{aligned}
 \angle AEF &= \angle CED, \\
 \therefore \angle A + \angle AFE &= \angle D + \angle ACD \\
 \therefore \angle ACD &= \angle A + \angle AFE - \angle D \\
 &= 35^\circ + 90^\circ - 42^\circ \\
 &= 83^\circ.
 \end{aligned}$$

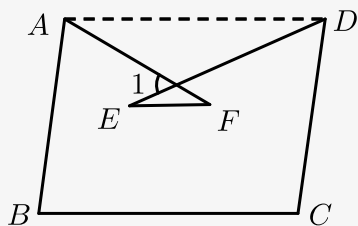
【标注】【知识点】三角形内角和的应用

4. 如图所示，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 360°

【解析】如图，连接 AD .

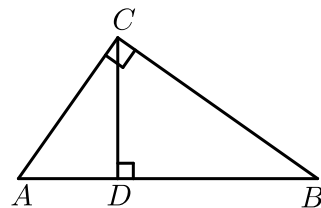


$$\begin{aligned}
 \because \angle 1 &= \angle E + \angle F, \angle 1 = \angle FAD + \angle EDA, \\
 \therefore \angle E + \angle F &= \angle FAD + \angle EDA, \\
 \therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F &= \angle BAD + \angle ADC + \angle B + \angle C. \\
 \text{又} \because \angle BAD + \angle ADC + \angle B + \angle C &= 360^\circ, \\
 \therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F &= 360^\circ. \\
 \text{故答案为: } &360^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】不规则图形的多角求和；蝴蝶型（8字倒角）

栗子3

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是高， $\angle ACD = 35^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数是 () .



A. 35°

B. 45°

C. 55°

D. 65°

【答案】 A

【解析】 $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$,

$$\angle BCD + \angle B = 90^\circ ,$$

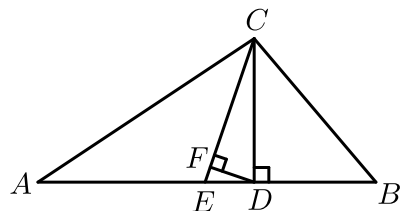
$$\therefore \angle ACD = \angle B ,$$

$$\therefore \angle B = 35^\circ .$$

故选A .

【标注】【知识点】双垂形

6. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, CE 平分 $\angle ACB$, $CD \perp AB$ 于 D , $DF \perp CE$, 则 $\angle CDF =$ _____ 度 .



【答案】 75

【解析】 $\because \angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 70^\circ .$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACB = 35^\circ .$$

$\because CD \perp AB$ 于 D ,

$$\therefore \angle CDA = 90^\circ ,$$

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle A - \angle CDA = 50^\circ .$$

$$\therefore \angle ECD = \angle ACD - \angle ACE = 15^\circ .$$

$\because DF \perp CE$,

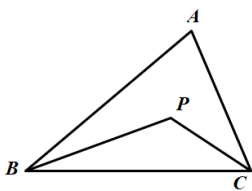
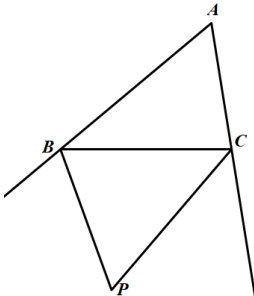
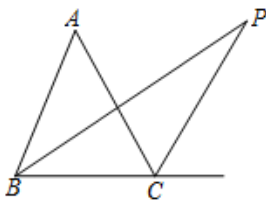
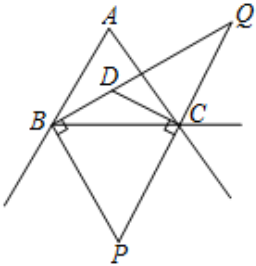
$$\therefore \angle CFD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle CFD - \angle DCF = 75^\circ .$$

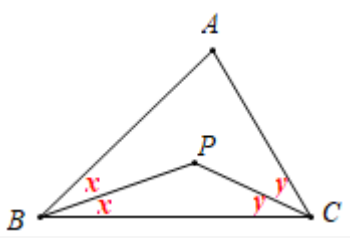
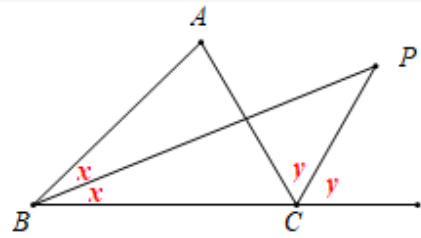
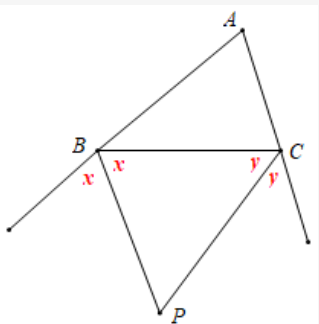
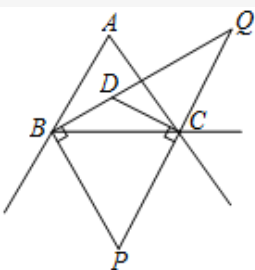
【标注】【知识点】双垂形

二、角平分线基础模型

锦囊妙计

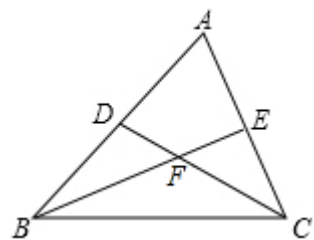
内角平分线模型	外角平分线模型	一内一外平分线模型	综合模型
			
$\angle P = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$	$\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$	$\angle P = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$	

【备注】

模型	推导
内角平分线 	设 $\angle ABP = \angle CBP = x$, $\angle ACP = \angle BCP = y$, 则 $\begin{cases} \angle A + 2x + 2y = 180^\circ \\ \angle P + x + y = 180^\circ \end{cases}$, $\therefore \angle P = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$
一内一外平分线 	设 $\angle CBP = x$, $\angle ACP = y$, 再结合外角的知识 , 有 $\begin{cases} 2x + \angle A = 2y \\ \angle P + x = y \end{cases}$, $\therefore \angle P = \frac{1}{2}\angle A$
外角平分线 	设 $\angle CBP = x$, $\angle BCP = y$, 再结合冰山模型 , 有 $\begin{cases} 2x + 2y = 180^\circ + \angle A \\ \angle P + x + y = 180^\circ \end{cases}$, $\therefore \angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$
综合模型 	由上方结论可得 : $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle Q = \frac{1}{2}\angle A$, $\therefore \angle P + \angle Q = 90^\circ$, $\angle P + \angle BDC = 180^\circ$

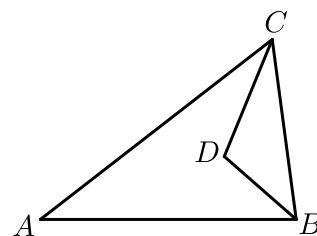
栗子4

7. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分线 BE 、 CD 相交于 F , $\angle ABC = 42^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 则 $\angle BFC$ 的度数为 () .



A. 118° B. 119° C. 120° D. 121° **【答案】** C**【解析】** 根据三角形的内角和定理可得 $\angle ACB = 78^\circ$,由角平分线的定义可得 $\angle FBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 21^\circ$, $\angle FCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 39^\circ$,在 $\triangle FBC$ 中, 再根据三角形的内角和定理可得 $\angle BFC = 180^\circ - 39^\circ - 21^\circ = 120^\circ$.**【标注】**【知识点】三角形-内角角分线

8. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle BCA$, 若 $\angle BDC : \angle A = 7 : 2$, 则 $\angle A$ 的大小为 () .

A. 30° B. 32° C. 36° D. 40° **【答案】** A**【解析】** $\because \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A$, BD 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle BCA$,

$$\therefore \angle DCB + \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - (\angle DCB + \angle DBC)$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\because \angle BDC : \angle A = 7 : 2,$$

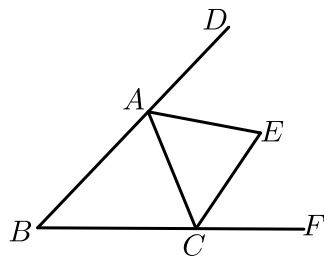
$$\therefore 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = \frac{7}{2}\angle A,$$

解得 $\angle A = 30^\circ$.

故选 A.

【标注】【知识点】三角形-内角角分线

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 44^\circ$ ，三角形的外角 $\angle DAC$ 与 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E ，则 $\angle AEC =$ _____ .



【答案】 68°

【解析】 $\because \angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，

$$\therefore \angle DAC = \angle B + \angle ACB,$$

$$\angle ACF = \angle B + \angle BAC.$$

$$\therefore \angle DAC + \angle ACF$$

$$= 2\angle B + \angle ACB + \angle BAC$$

$$= \angle B + 180^\circ$$

$$= 224^\circ.$$

$\because \angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E ，

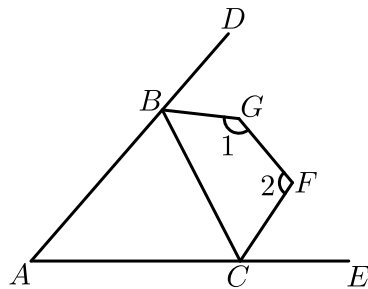
$$\therefore \angle EAC = \frac{1}{2} \angle DAC, \angle ECA = \frac{1}{2} \angle ACF;$$

$$\therefore \angle EAC + \angle ECA = \frac{1}{2} (\angle DAC + \angle ACF) = 112^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 180^\circ - (\angle EAC + \angle ECA) = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ.$$

【标注】 【知识点】 三角形-外角角平分线

10. 如图，在 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 50^\circ$ ，三角形的外角 $\angle DBC$ 和 $\angle BCE$ 的平分线上各取一点 G 、 F ，连接 GF ，则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为（ ）.



A. 115°

B. 230°

C. 245°

D. 255°

【答案】 C

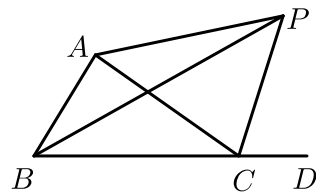
【解析】 $\because \angle A = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 130^\circ$,
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle DBC + \angle BCE = 360^\circ$,
 $\therefore \angle DBC + \angle BCE = 230^\circ$,
 $\therefore BG$ 平分 $\angle DBC$,
 CF 平分 $\angle BCE$,
 $\therefore \angle GBC = \frac{1}{2} \angle DBC$,
 $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCE$,
 $\therefore \angle GBC + \angle BCF = 115^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle GBC + \angle BCF = 360^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 245^\circ$.
 故选C .

【标注】【知识点】三角形-外角角分线

栗子6

11. 如图, $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P , 若 $\angle BPC = 40^\circ$, 则 $\angle CAB = \underline{\hspace{2cm}}$.

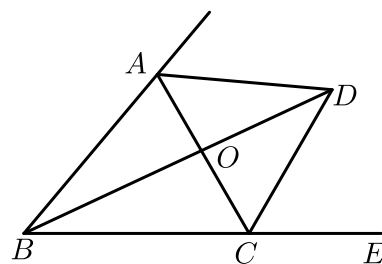


【答案】 80°

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$,
 在 $\triangle PBC$ 中, $\angle PCD = \angle BPC + \angle PBC$,
 $\therefore PB$ 、 PC 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线 ,
 $\therefore \angle PCD = \frac{1}{2} \angle ACD$, $\angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC$,
 $\therefore \angle PCD = \angle BPC + \angle PBC = 40^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$,
 $\therefore \frac{1}{2} \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ABC + 40^\circ$,
 $\therefore \angle ACD - \angle ABC = 80^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 80^\circ$,
 即 $\angle CAB = 80^\circ$.

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 50^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，点 E 在 BC 的延长线上， $\angle ABC$ 的平分线 BD 与 $\angle ACE$ 的平分线 CD 相交于点 D ，连接 AD ，下列结论中不正确的是（ ）。



- A. $\angle BAC = 70^\circ$ B. $\angle DOC = 90^\circ$ C. $\angle BDC = 35^\circ$ D. $\angle DAC = 55^\circ$

【答案】 B

【解析】 A 选项： $\because \angle ABC = 50^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ,$$

正确。

B 选项： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ,$$

$$\text{在} \triangle ABO \text{中}, \angle AOB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABO = 180^\circ - 70^\circ - 25^\circ = 85^\circ,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle AOB = 85^\circ,$$

错误。

C 选项： $\because CD$ 平分 $\angle ACE$ ，

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACE = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DOC - \angle ACD = 180^\circ - 85^\circ - 60^\circ = 35^\circ,$$

正确。

D 选项： $\because BD$ 、 CD 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACE$ 的平分线，

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，

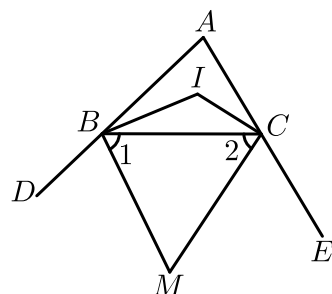
$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ,$$

正确。

故选 B。

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

如图， $\triangle ABC$ 中， BI 、 CI 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ，且 $\angle BIC = 140^\circ$ ， BM 、 CM 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的外角，则 $\angle BMC$ _____。



【答案】 40°

【解析】 $\because BI$ 、 CI 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ， BM 、 CM 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的外角，

$$\therefore \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB, \angle 1 = \frac{1}{2}\angle DBC, \angle 2 = \frac{1}{2}\angle BCE,$$

$$\because \angle ABC + \angle DBC = 180^\circ, \angle ACB + \angle BCE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle IBM = 90^\circ, \angle ICM = 90^\circ,$$

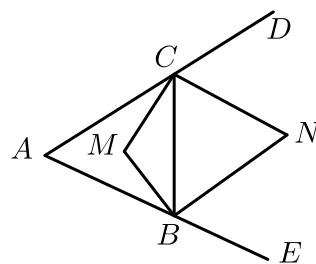
$$\because \angle BIC + \angle IBM + \angle ICM + \angle BMC = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BMC = 180^\circ - \angle BIC = 40^\circ.$$

故答案为： 40° 。

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

14. 如图，点 M 是 $\triangle ABC$ 两个内角平分线的交点，点 N 是 $\triangle ABC$ 两个外角平分线的交点，如果 $\angle CMB : \angle CNB = 2 : 1$ ，则 $\angle CAB$ 的度数为 _____°。



【答案】 60

【解析】 $\angle CMB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ 。

$$\angle CNB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A, \text{ 因为 } \angle CMB : \angle CNB = 2 : 1.$$

$$\text{则 } 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right).$$

$$\text{解得 } \angle A = 60^\circ.$$

$\therefore AD \parallel BC$ ，故①正确。

② $\because BD$ 、 BE 分别平分 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle ABC$ 、外角 $\angle MBC$ ，

$$\therefore \angle DBE = \angle DBC + \angle EBC$$

$$= \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle MBC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore EB \perp DB$ ，故②正确，

$$\textcircled{3} \because \angle DCP = \angle BDC + \angle CBD, 2\angle DCP = \angle BAC + 2\angle DBC$$

$$\therefore 2(\angle BDC + \angle CBD) = \angle BAC + 2\angle DBC,$$

$$\therefore \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\because \angle BAC + 2\angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC + \angle ACB = 90^\circ, \text{故}\textcircled{3}\text{正确},$$

$$\textcircled{4} \because \angle BEC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle MBC + \angle NCB) = 180^\circ - \frac{1}{2}$$

$$(\angle BAC + \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle BAC),$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAC + 2\angle BEC = 180^\circ, \text{故}\textcircled{4}\text{正确},$$

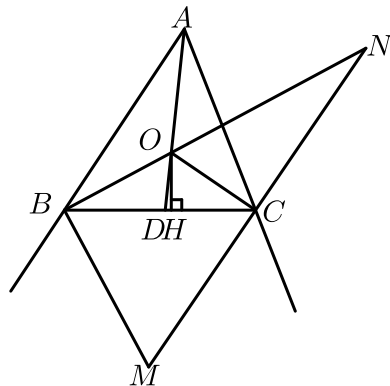
故答案为：①②③④。

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

16. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点，连接 AO 并延长交 BC 于点 D ， BM 、 CM 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的外角，直线 MC 和直线 BO 交于点 N ， $OH \perp BC$ 于点 H ，有下列结论：

① $\angle BOC + \angle BMC = 180^\circ$ ；② $\angle N = \angle DOH$ ；③ $\angle BOD = \angle COH$ ；④ 若 $\angle CBA = \angle CAB$ ，则 $MN \parallel AB$

其中正确的有 _____。



【答案】 ①③④

【解析】 ① $\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 三个内角平分线交点，

∴由角平分线得 $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

∴点M为 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 外角平分线交点 ,

∴ $\angle BMC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

∴ $\angle BOC + \angle BMC = 180^\circ$, ①对 ;

②由 $\angle N$ 为 $\angle ABC$ 角平分线 , $\angle ACB$ 外角平分线交点得 ,

$\angle N = \frac{1}{2}\angle BAC$.

∴ $OH \perp BC$,

∴ $\angle ODH = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle ABC$,

∴ $\angle DOH = 90^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ABC\right)$,

∴②错 ;

③由外角定理可得 ,

$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC$.

∴ $OH \perp BC$,

∴ $\angle COH = 90^\circ - \angle OCH$,

$\angle OCH = 90^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC\right)$,

∴ $\angle HOC = \angle BOD$, ③对 ;

④∵ $\angle CBA = \angle CAB$,

∴ $\angle CBN = \angle ABN = \frac{1}{2}\angle BAC$.

∴ $\angle N = \frac{1}{2}\angle BAC$,

∴ $AB \parallel MN$,

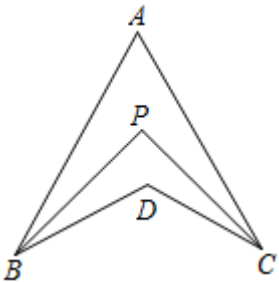
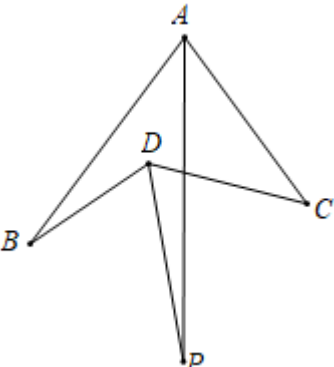
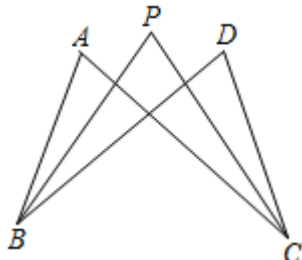
④对 .

故选①③④ .

【标注】【知识点】角分线性质定理

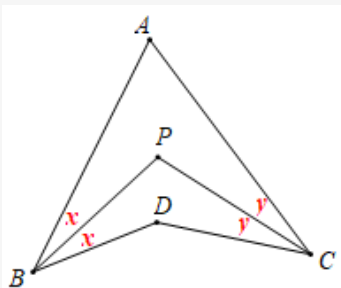
三、结合模型

 锦囊妙计

飞镖+角平分线 (1)	飞镖+角平分线 (2)	“8”字+角平分线
		
$\angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$	$\angle P = \frac{1}{2} \angle C - \angle B $	$\angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

【备注】

飞镖+角平分线 (1)

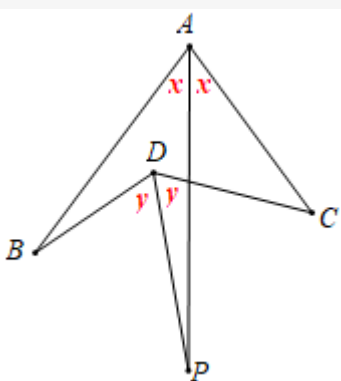


设 $\angle ABP = \angle DBP = x$,
 $\angle ACP = \angle DCP = y$, 则

$$\begin{cases} \angle A + x + y = \angle P \\ \angle P + x + y = \angle D \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

飞镖+角平分线 (2)



设 $\angle BAP = \angle CAP = x$
 $\angle BDP = \angle CDP = y$, 则

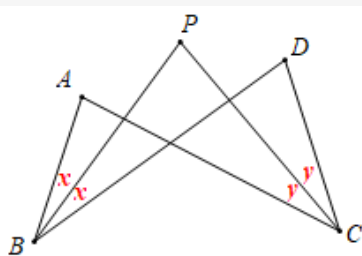
$$\begin{cases} x + \angle C = y + \angle P \\ y = x + \angle B + \angle P \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$$

由于 $\angle B, \angle C$ 大小不确定, 所以结论为

$$\angle P = \frac{1}{2}|\angle C - \angle B|$$

“8”字+角平分线

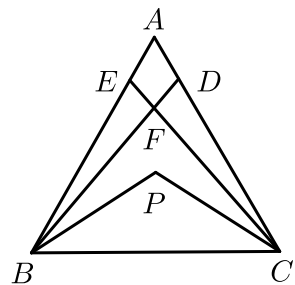


设 $\angle ABP = \angle DBP = x$,
 $\angle ACP = \angle DCP = y$, 则

$$\begin{cases} \angle A + x = \angle P + y \\ \angle P + x = \angle D + y \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

17. 如图， P 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle BPC = 120^\circ$ ， BD 是 $\angle ABP$ 的平分线， CE 是 $\angle ACP$ 的平分线， BD 与 CE 交于 F ，则 $\angle BFC$ 的度数为（ ）。



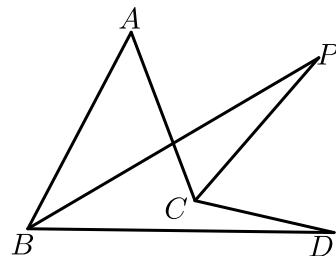
- A. 85° B. 90° C. 95° D. 100°

【答案】 C

【解析】 $\because \angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle BPC = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 110^\circ$ ， $\angle PBC + \angle PCB = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABP + \angle ACP = 50^\circ$ ，
 又 $\because BD$ 是 $\angle ABP$ 的平分线， CE 是 $\angle ACP$ 的平分线，
 $\therefore \angle FBP + \angle FCP = 25^\circ$ ，
 $\therefore \angle FBC + \angle FCB$
 $= \angle FBP + \angle FCP + \angle PBC + \angle PCB$
 $= 25^\circ + 60^\circ$
 $= 85^\circ$ ，
 $\therefore \angle BFC = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ 。

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

18. 如图， $\angle ABD$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 P ，若 $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle D = 10^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数为（ ）。



- A. 15° B. 20° C. 25° D. 30°

【答案】 B

【解析】 $\because BP$ 平分 $\angle ABD$ ，

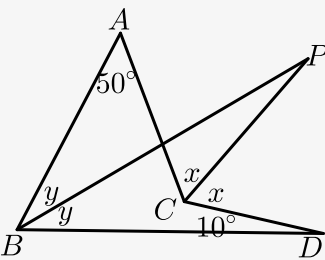
∴ 设 $\angle ABD = 2y$,

∴ $\angle ABP = \angle DBP = y$,

∴ CP 平分 $\angle ACD$,

∴ 设 $\angle ACD = 2x$,

∴ $\angle ACP = \angle DCP = x$,



由飞镖模型可得

$\angle ABD + \angle A + \angle D = \angle ACD$,

∴ $2y + 50^\circ + 10^\circ = 2x$,

∴ $x - y = 30^\circ$,

∴ 由8字模型可得 $\angle A + \angle ABP = \angle P + \angle ACP$,

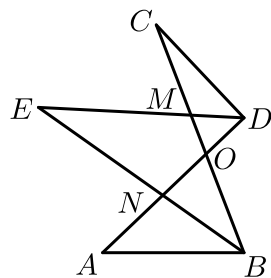
∴ $50^\circ + y = \angle P + x$,

∴ $\angle P = 50^\circ + y - x = 50^\circ - (x - y) = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.

故选B.

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

19. 如图，已知 $\angle A = 44^\circ$ ， $\angle C = 22^\circ$ ， $\angle ADC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线交于点 E ，则 $\angle E$ 的度数为（ ）.



A. 30°

B. 31°

C. 32°

D. 33°

【答案】 D

【解析】 根据“8”字模型：

$\angle A + \angle ABE = \angle E + \angle EDA$ ①；

$\angle C + \angle EDC = \angle E + \angle EBC$ ②.

又由已知， $\angle ABE = \angle EBC$ ， $\angle EDA = \angle EDC$ ，

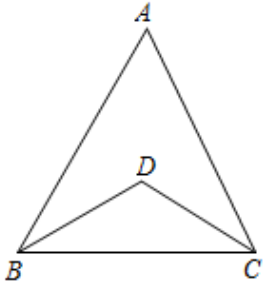
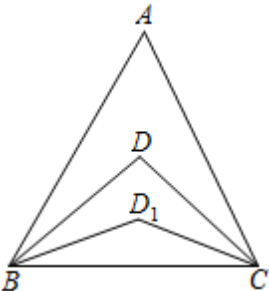
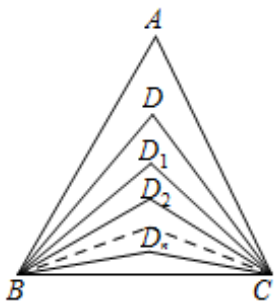
①+②得， $\angle A + \angle C = 2\angle E$ ，故 $\angle E = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 33^\circ$.

【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

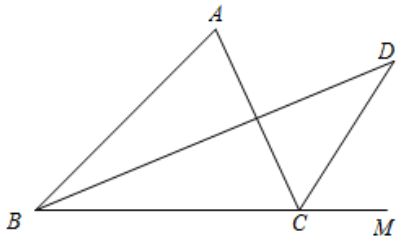
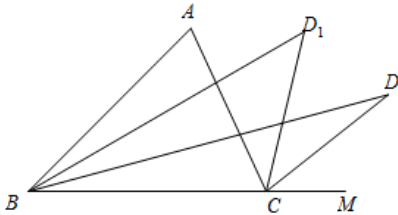
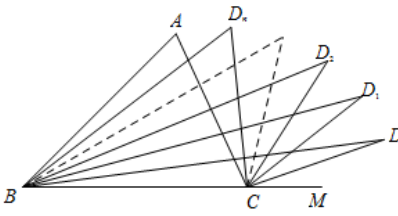
四、规律探究

锦囊妙计

(1) 内角平分线模型结论

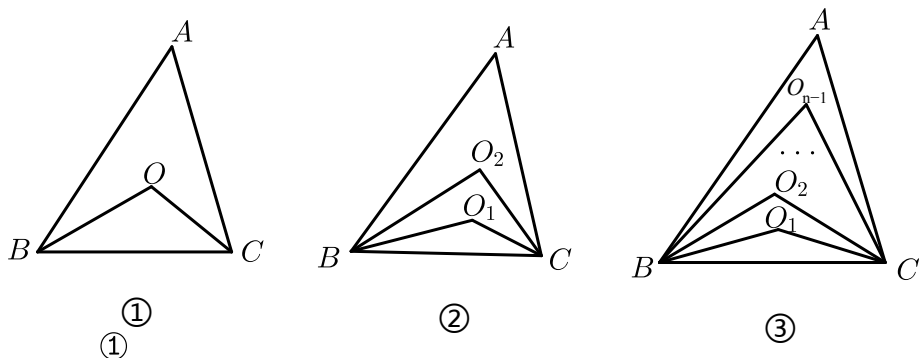
模型	结论
 角平分线	$\angle D = \frac{180^\circ + \angle A}{2}$
 角三等分线	$\angle D = \frac{180^\circ + 2\angle A}{3}$
...	...
 角n等分线	$\angle D = \frac{180^\circ + (n-1)\angle A}{n}$

(2) 一内一外平分线模型

模型	结论
 角平分线	$\angle D = \frac{1}{2} \angle A$
 角三等分线	$\angle D = \frac{1}{3} \angle A$
...	...
 角n等分线	$\angle D = \frac{1}{n} \angle A$

栗子9

20. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$.



- (1) 如图①， $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线交于点 O ，则 $\angle BOC = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 如图②， $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的三等分线分别对应交于 O_1 、 O_2 ，则 $\angle BO_2C = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (3) 如图③, $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的 n 等分线分别对应交于 O_1 、 $O_2 \dots O_{n-1}$ (内部有 $n-1$ 个点), 则
 $\angle BO_{n-1}C = \underline{\hspace{2cm}}$ (用含 n 的代数式表示) .
- (4) 如图③, $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的 n 等分线对应交于 O_1 、 $O_2 \dots O_{n-1}$, $\angle BO_{n-1}C = 90^\circ$, 求 n .

【答案】 (1) 120° .

(2) 100° .

(3) $60^\circ + \frac{120^\circ}{n}$.

(4) $n = 4$.

【解析】 (1) $\because$ 点 O 是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线的交点,

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ .$$

故答案为: 120° .

(2) $\because$ 点 O_2 是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的三等分线的交点,

$$\therefore \angle O_2BC + \angle O_2CB = \frac{2}{3}(\angle ABC + \angle ACB) = 80^\circ ,$$

$$\therefore \angle BO_2C = 100^\circ .$$

故答案为: 100° .

(3) $\because$ 点 O_{n-1} 是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的 n 等分线的交点,

$$\therefore \angle O_{n-1}BC + \angle O_{n-1}CB = \frac{n-1}{n}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle BO_{n-1}C = 180^\circ - \frac{n-1}{n} \times 120^\circ$$

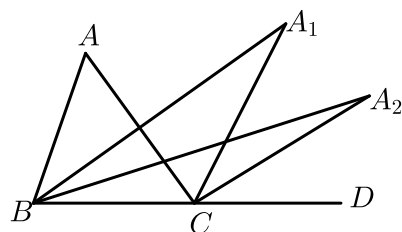
$$= \left(1 + \frac{2}{n}\right) \times 60^\circ .$$

$$\text{故答案为: } 60^\circ + \frac{120^\circ}{n} .$$

(4) 由(3): $60^\circ + \frac{120^\circ}{n} = 90^\circ$, 解得: $n = 4$.

【标注】【知识点】三角形-内角角分线

21. 如图, $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1 , $\angle A_1BC$ 的平分线与 $\angle A_1CD$ 的平分线交于点 A_2 , $\dots$ $\angle A_{n-1}BC$ 的平分线与 $\angle A_{n-1}CD$ 的平分线交于点 A_n , 设 $\angle A = \theta$, 则
 $\angle A_n = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{\theta}{2^n}$

【解析】方法一：由三角形的外角性质得， $\angle ACD = \angle A + \angle ABC$ ，

$$\angle A_1CD = \angle A_1 + \angle A_1BC，$$

$\therefore \angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1 ，

$$\therefore \angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC，\angle A_1CD = \frac{1}{2}\angle ACD，$$

$$\therefore \angle A_1 + \angle A_1BC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle A + \angle A_1BC，$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A，$$

$$\text{同理可得 } \angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_1 = \frac{\theta}{4}，$$

...

$$\angle A_n = \frac{\theta}{2^n}。$$

$$\text{故答案为 } \frac{\theta}{2^n}。$$

方法二： $\because A_1B$ 是 $\angle ABC$ 的平分线， A_1C 是 $\angle A_1CD$ 的平分线。

$$\therefore \angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC，\angle A_1CD = \frac{1}{2}\angle ACD，$$

$$\text{又 } \because \angle ACD = \angle A + \angle ABC，\angle A_1CD = \angle A_1BC + \angle A_1，$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle A_1，$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A，$$

$$\text{又 } \because \angle A = \theta，$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{\theta}{2}，$$

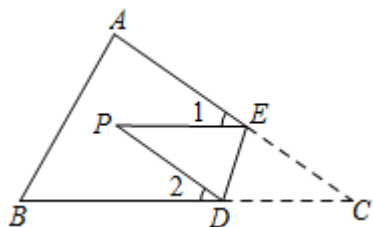
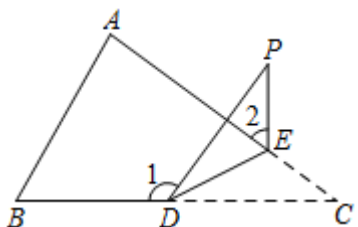
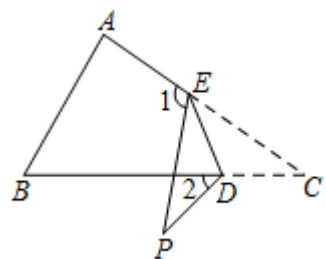
$$\text{同理可得 } \angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2^2}，\dots\dots$$

$$\text{所以 } \angle A_n = \frac{\theta}{2^n}。$$

【标注】【知识点】三角形-外角角分线

五、 三角形折叠

 锦囊妙计

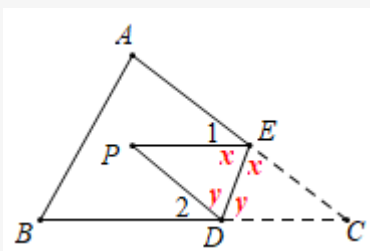
角向内翻折	角向上翻折	角向下翻折
		
$\angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$	$\angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 - \angle 2)$	$\angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 - \angle 2)$

【备注】【核心】

翻折性质：翻折前后挨着“折痕”的两个角相等，也就是说“折痕”是隐藏的角平分线。

【证明】

角向内翻折



证：

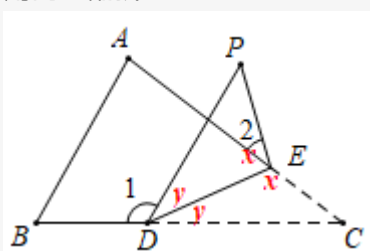
设

$$\angle PED = \angle CED = x, \angle PDE = \angle CDE = y$$

$$\text{则有：} \begin{cases} \angle 1 + 2x = 180^\circ \\ \angle 2 + 2y = 180^\circ \\ \angle P + x + y = 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$$

角向上翻折



证：

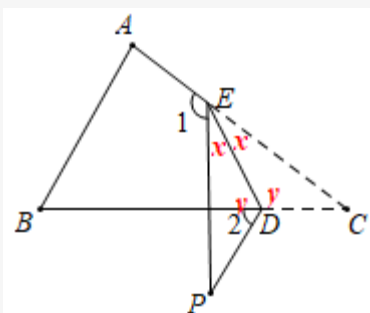
设

$$\angle PED = \angle CED = x, \angle PDE = \angle CDE = y$$

$$\text{则有：} \begin{cases} \angle 1 + 2y = 180^\circ \\ 2x - \angle 2 = 180^\circ \\ \angle P + x + y = 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 - \angle 2)$$

角向下翻折



证：

设

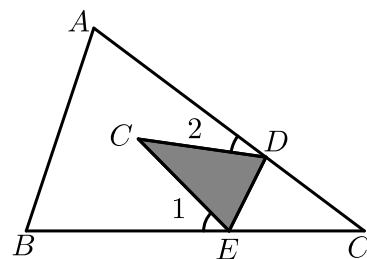
$$\angle PED = \angle CED = x, \angle PDE = \angle CDE = y$$

$$\text{则有：} \begin{cases} \angle 1 + 2x = 180^\circ \\ 2y - \angle 2 = 180^\circ \\ \angle P + x + y = 180^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle 1 - \angle 2)$$

【注意】也可利用外角定理进行推导

22. 在三角形纸片 ABC ， $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ．将纸片的一角对折，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 内，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）．



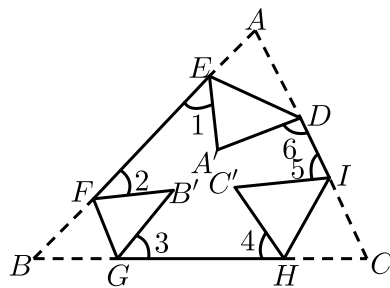
- A. 50° B. 60° C. 70° D. 80°

【答案】 B

【解析】 $\because \angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ - (65^\circ + 75^\circ) = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle C = 140^\circ$ ，
 $\therefore \angle 2 = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle 1 + \angle CED + \angle CDE)$
 $= 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ ．
 故选：B．

【标注】【知识点】三角形折叠

23. 如图所示，把一个三角形纸片 ABC 的三个顶角向内折叠之后（3个顶点不重合），图中 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \underline{\quad\quad}^\circ$ ．

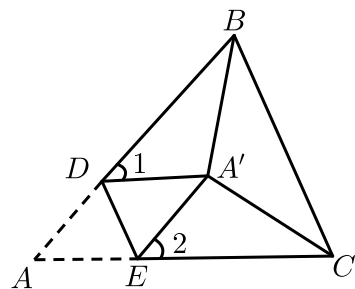


【答案】 360

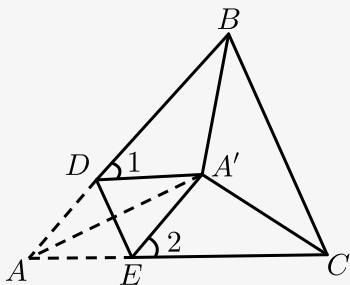
【解析】 $\angle 1 + \angle 6 = 2\angle A$ ，
 $\angle 2 + \angle 3 = 2\angle B$ ，
 $\angle 4 + \angle 5 = 2\angle C$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 360^\circ$ ．

【标注】【知识点】三角形折叠

24. 如图, 将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠, 使点 A 落在点 A' 处, 且 $A'B$ 平分 $\angle ABC$, $A'C$ 平分 $\angle ACB$, 若 $\angle BA'C = 110^\circ$, 则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为 () .

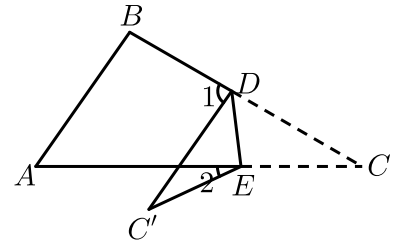
A. 80° B. 90° C. 100° D. 110°

【答案】A

【解析】连接 AA' ,
 $\because A'B \text{ 平分 } \angle ABC, A'C \text{ 平分 } \angle ACB, \angle BA'C = 110^\circ,$
 $\therefore \angle A'BC + \angle A'CB = 70^\circ,$
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 140^\circ,$
 $\therefore \angle BAC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$
 $\because \angle 1 = \angle DAA' + \angle DA'A,$
 $\angle 2 = \angle EAA' + \angle EA'A,$
 $\angle DAA' = \angle DA'A, \angle EAA' = \angle EA'A,$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 2(\angle DA'A + \angle EA'A) = 2\angle BAC = 80^\circ.$

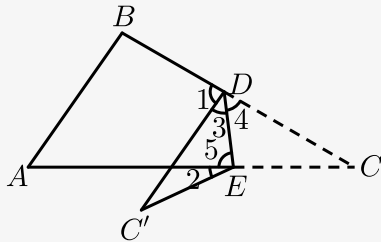
【标注】【知识点】三角形折叠

25. 已知, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 95^\circ$, 将纸片的一角折叠, 使点 C 落在 $\triangle ABC$ 外. 若 $\angle 2 = 25^\circ$, 则 $\angle 1$ 的度数为 ____ $^\circ$.



【答案】 85

【解析】 如图，



$$\because \angle A = 55^\circ, \angle B = 95^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 55^\circ - 95^\circ = 30^\circ,$$

又 $\because$ 将三角形纸片的一角折叠，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 外，

$$\therefore \angle C' = \angle C = 30^\circ,$$

$$\text{而 } \angle 3 + \angle 2 + \angle 5 + \angle C' = 180^\circ, \angle 5 = \angle 4 + \angle C = \angle 4 + 30^\circ, \angle 2 = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + 25^\circ + \angle 4 + 30^\circ + 40^\circ = 180^\circ,$$

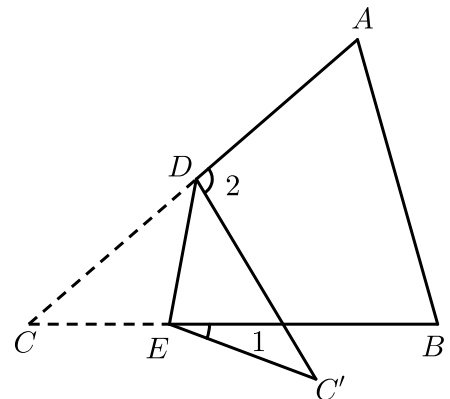
$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

故答案为：85 .

【标注】 【知识点】 三角形折叠

26. 如图，三角形纸片 ABC 中， $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，将 $\angle C$ 沿 DE 对折，使点 C 落在 $\triangle ABC$ 外的点 C' 处，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ） .



A. 80°

B. 90°

C. 100°

D. 110°

【答案】 C

【解析】 $\because \angle A = 65^\circ, \angle B = 75^\circ,$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 65^\circ - 75^\circ = 40^\circ,$$

由折叠的性质可知, $\angle C' = \angle C = 40^\circ,$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle C' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle C + \angle 3 = 100^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】三角形折叠